PRÁCTICA 1

TEORÍA DE NÚMEROS COMPLEJOS

1. Halle z tal que $|z| + z = 2 + j$ R. $z = \frac{3}{4} + j$

2. $Si\ z = \left(\dfrac{2+j}{1+3j+\frac{4}{j}}\right)^3 + e^{(3-2j)^2} + 2 + 3j$, determine $Im(z)$ $R\ .\dfrac{3}{4} - e^5 \operatorname{sen} 12$

3. Sea $w \neq 1$ una raíz de $z^n = 1$, determine el valor de $1 + 3w + 5w^2 + 7w^3 + \cdots + (2n-1)w^{n-1}$

$$R.\ \frac{2n}{w-1}$$

4. $Si\ z = \dfrac{(-2+2j)^n}{(1-j)^{n-1}} + (1+j)^n$, determine $Re(z)$ R. $(-2)^n + \left(\sqrt{2}\right)^n \cos\left(\dfrac{n\pi}{4}\right)$

5. $Si:\ z = \dfrac{-1+\sqrt{3}j}{(2-2j)^{n-2}}$ Determine $Im(z)$.

$$R.\ \frac{16}{2^{3n/2}} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{n\pi}{4}\right)$$

6. Grafique $S = \left\{z \in \mathbb{C} \ /\ Im\left(z + \frac{1}{z}\right) \leq 0;\ |z - 1 - j| \leq 2 - Im(\bar{z})\right\}$

$$R.\ \begin{cases} y \leq 0 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \geq 1 \\ \qquad\qquad \vee \\ y \geq 0 \quad \wedge \quad x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \qquad \wedge \qquad (x-1)^2 \leq 6\left(y + \tfrac{1}{2}\right)$$

7. Determine la imagen de:

a) Triángulo con vértices en $0\ ;\ 1 + j\ ;\ 1 - j$ bajo el mapeo $f(z) = z^2$

b) Circunferencia $\left|z + \frac{1}{2}j\right| = \frac{1}{2}$ bajo el mapeo $f(z) = \frac{1}{z^2}$

c) La recta $Re(z) = -2$ bajo el mapeo $f(z) = 1 - z^2$

R. $a)\ u = 1 - \dfrac{1}{4}v^2\ , -2 \leq v \leq 2$, $b)\ u + 1 = \dfrac{1}{4}v^2$, $c)\ u = -3 + \dfrac{1}{16}v^2$

8. Verifique que las siguientes funciones no son diferenciables en ningún punto:

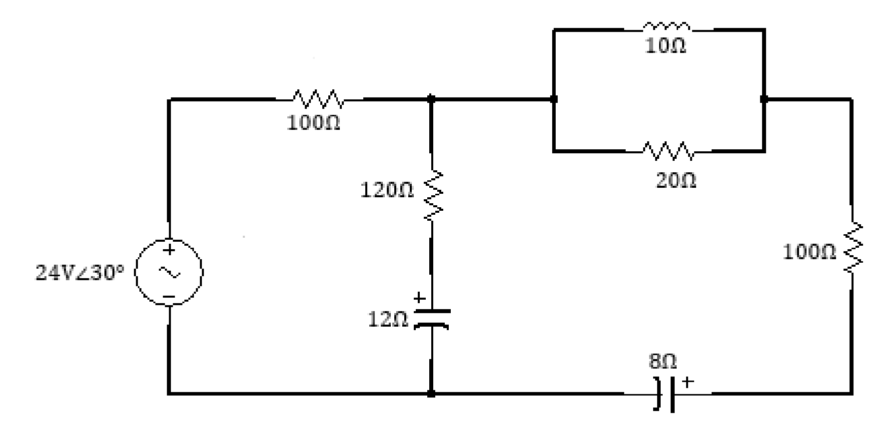
$a).\ f(z) = 2\bar{z} - 4 + 5j$ $b.\ f(z) = 2Re(z) - 4Im(z)$

9. Verificar que la función:

$$f(z) = \begin{cases} \dfrac{2\bar{z}^3}{|z|^2} & ; \quad z \neq 0 \\ 0 & ; \quad z = 0 \end{cases}$$

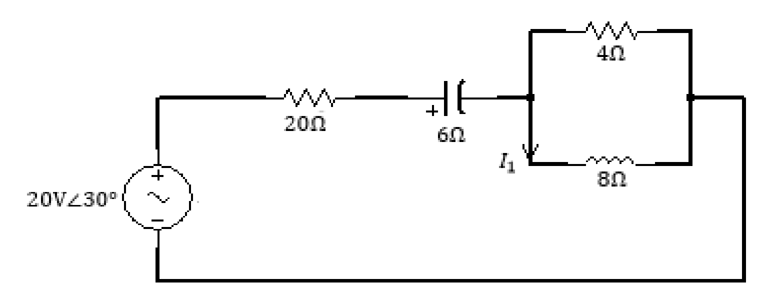
Satisface las ecuaciones de Riemann en $z = 0$.

10. En el circuito que se muestra en la figura, determine la potencia disipada en la resistencia de 10Ω.



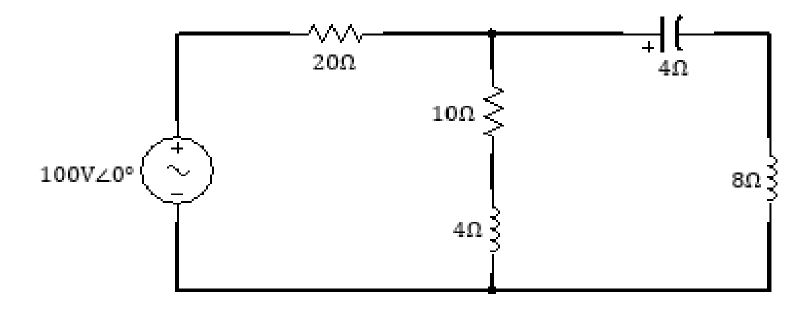
$$R.\ P_{10\Omega} = 0{,}053 watts\angle 93{,}4°$$

11. En el circuito que se muestra en la figura, determine la intensidad de corriente I_1



$$R.\ I_1 = 0{,}406A\angle -23{,}13°$$

12. Para la red de la figura, calcule la potencia en la resistencia de 8Ω.



$$R.\ P_{8\Omega} = 125{,}704\ watts\angle 38{,}8°$$

13. Resuelva $1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 = 0$ tal que $z \neq 1$.

$$R.\ w_k = \cos\left(\frac{k\pi}{3}\right) + j\,\text{sen}\left(\frac{k\pi}{3}\right),\ \ k = 1; 2; 3; 4; 5$$

14. Bajo el mapeo $f(z) = \frac{z-j}{z+j}$, determine la región en el plano $w = u + jv$ que corresponde al plano $z = x + jy$ de la región $x > 0$, $y > 0$. R. $v < 0$, $u^2 + v^2 < 1$

15. Bajo el mapeo $f(z) = \frac{z+1}{z-j}$, halle la región en el plano $w = u + jv$ que corresponde al plano $z = x + jy$ de la región $x < 0$, $y < 0$. R. $u + v < 1$, $u^2 + v^2 < u + v$

16. Utilizando la definición verifique que:

$$a) \quad \lim_{z\to 1}\left(\frac{2z+7}{z+2}\right) = 3 \qquad b) \quad \lim_{z\to 3}\left(\frac{2z-1}{z-2}\right) = 5$$

17. Suponga que f es una función continua en un dominio D. Demuestre que las siguientes funciones son continuas en D : a) $Re[f(z)]$, b) $|f(z)|$

18. Sea $f(z) = \frac{zIm(z)}{|z|}$. ¿Puede ser $f(0)$ definido de manera que $f(z)$ sea continua en $z = 0$?

19. Verifique que las siguientes funciones no son diferenciables en ningún punto:

a) $f(z) = \bar{z} + 2 - 3j$ b) $f(z) = 2y + 3xj$

20. Verifique que las siguientes funciones satisfacen la ecuación de Cauchy-Riemann en $z = 0$ pero no diferenciables en dicho punto:

$$a).\ f(z) = \begin{cases} \dfrac{(2\bar{z})^3}{|z|^2} & ; \quad z \neq 0 \\ 0 & ; \quad z = 0 \end{cases} \qquad b).\ f(z) = |2xy|^{1/2}$$

21. Verifique que $f(z) = z^n$ es diferenciable en todo $z \in \mathbb{C}$.

22. ¿La función $f(z) = 2 - 3j - 3|z|^2$ es analítica en $z = 0$? Justifique su respuesta.

23. Verificar $f(z) = sen(az)$ es analítica

24. Verificar que:

$$\overline{[tgz]} = tg\bar{z}$$

25. resolver la ecuación:

$$a).\ senz = coz \qquad R.\ z = \frac{\pi}{4} + n\pi \ , n \in \mathbb{Z} \qquad b).\ senz = 1 - j$$